Classification des formes quadratiques réelles

Gifone, p. 305, 309
Rombaldi, p. 476, 477

Théorème : Soit (E,q) un espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E.
Alors il existe une base q-orthogonale de E.

Par récurrence sur $n = \dim E$.

- $n=1$: rien à démontrer
- Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang $n-1$. Si $q=0$, toutes les bases sont q-orthogonales.
  Sinon, $\exists v \in E$ tel que $q(v) \neq 0$. Alors f définie par $f(x) = \varphi_q(v,x)$, où φ_q est la forme polaire de q, est une forme linéaire non nulle sur E. Donc $H = \operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E. D'où $\dim H = n-1$ et $E = H \oplus \operatorname{Vect}(v)$. Par H.R., $\exists (e_1, \dots, e_{n-1})$ base $q_{|H}$-orthogonale de H.
  Alors $\underbrace{(e_1, \dots, e_{n-1}, v) \text{ est une base } q\text{-orthogonale de } E}$.
  $\varphi_q(e_i, e_j) = 0,\ \forall 1 \leq i \neq j \leq n-1$
  $\varphi_q(e_i, v) = f(e_i) = 0$ car $e_i \in H = \operatorname{Ker} f$ $\forall 1 \leq i \leq n-1$

Théorème : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E.
Si q est de rang r, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$
où $s+t=r$ et ne dépendent que de q (et non pas de la base) $\longrightarrow (s,t) =: \operatorname{sgn}(q)$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base q-orthogonale de E. Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ où $d_i = q(e_i)$.
Alors $r = \#\{i \in [\![1,n]\!] ;\ d_i \neq 0\}$. Supposons $d_1, \dots, d_s > 0$ et $d_{s+1}, \dots, d_r < 0$, quitte à réordonner $\mathcal{B}$.
Alors : $\forall 1 \leq i \leq s,\ \exists \mu_i \in \mathbb{R}$ tq $d_i = \mu_i^2$ et $\forall s+1 \leq i \leq r,\ \exists \mu_i \in \mathbb{R}$ tq $d_i = -\mu_i^2$.
Ainsi, la base $\mathcal{C} = \left(\frac{e_1}{\mu_1}, \dots, \frac{e_s}{\mu_s}, \frac{e_{s+1}}{\mu_{s+1}}, \dots, \frac{e_r}{\mu_r}, e_{r+1}, \dots, e_n\right)$ est encore q-orthogonale et

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(q) = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ où } t = r-s.$$

Soit $\mathcal{B}' = (e_i')_{1 \leq i \leq n}$ une autre base q-orthogonale de E vérifiant : $\begin{cases} \forall 1 \leq i \leq s',\ q(e_i') > 0 \\ \forall s'+1 \leq i \leq s'+t',\ q(e_i') < 0 \\ \forall s'+t'+1 \leq i \leq n,\ q(e_i') = 0 \end{cases}$

En considérant $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(q)$, on a $s'+t' = r = s+t$. Montrons que $s = s'$ et $t = t'$.
Soit $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_s)$ et $G' = \operatorname{Vect}(e'_{s'+1}, \dots, e'_n)$, avec $F = \{0\}$ si $s=0$ et $G' = \{0\}$ si $s'=n$.
Si $s \geq 1$, on a : $\forall x \in F \setminus \{0\},\ q(x) = \sum_{i=1}^{s} q(e_i) x_i^2 > 0$ et $\forall x \in G' \setminus \{0\},\ q(x) = \sum_{i=s'+1}^{n} q(e_i') x_i^2 < 0$
D'où $\underbrace{F \cap G' = \{0\}}_{\text{encore vrai si } s=0}$. Donc F et G' sont en somme directe et $\dim(F \oplus G') = \dim F + \dim G' = s + n - s' \overset{\text{car } F \oplus G' \subset E}{\leq} n$
D'où $s \leq s'$. Par symétrie des rôles, on a $s' \leq s$ et donc $s = s'$. Puisque $s+t = s'+t'$, on a $t = t'$.

Théorème : Sous les mêmes hypothèses, si $\begin{cases} s' = \max\limits_{F \in \mathcal{P}} \dim(F) \text{ où } \mathcal{P} = \{F \text{ sev de } E ;\ q_{|F} > 0\} \\ t' = \max\limits_{F \in \mathcal{N}} \dim(F) \text{ où } \mathcal{N} = \{F \text{ sev de } E ;\ q_{|F} < 0\} \end{cases}$
alors $(s', t') = \operatorname{sgn}(q)$.

Par définition de la signature, $s \leq s'$ et $t \leq t'$. Montrons que $s = s'$.

- Si $\mathcal{P} = \emptyset$, $s = s' = 0$.
- Sinon, $\exists F \in \mathcal{P}$ tel que $\dim F = s' \overset{\text{si } s'=0,\ s=0 \text{ donc } s=s'}{\geq} 1$. Soit $(e_1, \dots, e_{s'})$ une base q-orthogonale de F.
  Puisque $q_{|F} > 0$, $q_{|F}$ est non dégénérée donc $E = F \oplus F^\perp$ et $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = n - s'$.
  On a alors $F^\perp = \operatorname{Vect}\underbrace{(e_{s'+1}, \dots, e_n)}_{\text{base } q\text{-orthogonale de } F^\perp}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base q-orthogonale de E.

  Par maximalité de F, $q_{|F^\perp} \leq 0$. Donc, $\underbrace{\text{par unicité de la signature}}$, $s' = s$. $\exists G \subset F^\perp$ tq $q_{|G} < 0$ et $t'' = \dim G$ (si $t' \neq 0$) et donc $\operatorname{sgn}(q) = (s', t'')$
  On montre de même que $t = t'$.